BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

RİYAZİYYAT

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аг.Х.ХАНМАМЕДОВ, Х.Э.АББАСОВА , Я.И.ГУСЕЙНОВА

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается начально-краевая задача для цепочки Тоды, представляющей собой полубесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений. Доказана глобальная разрешимость задачи в классе ограниченных равномерно по t на всей оси последовательностей $a(t)=(a_n(t))_{n=1}^{\infty}$, $b(t)=(b_n(t))_{n=1}^{\infty}$.

Для последовательностей вещественнозначных функций $a(t)=(a_n(t))_{n=1}^{\infty}$, $a_n(t)>0$, $b(t)=(b_n(t))_{n=1}^{\infty}$, $a_n ,b_n \in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$ рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \dfrac{1}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) , \cdot = \dfrac{d}{dt} , \ n=1,2,..., \\ \dot{b}_1 = -a_1^2 , \ \dot{b}_n = a_{n-1}^2 - a_n^2 , \ n=1,2,.... \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1), называемая цепочкой Тоды, имеет важные приложения в теории нелинейных волн (см. [1]-[2] и литературу в них). Для (1) поставим задачу Коши

$$a_n(0)=\hat{a}_n > 0 , \ b_n(0)=\hat{b}_n , \ n=1,2,..., \tag{2}$$

где последовательности $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ являются ограниченными, т.е. $\hat{a}_n , \hat{b}_n \in \ell_\infty[1,\infty)$. В работах [1]-[2] доказана, что задача (1)-(2) имеет решение в классе ограниченных локально равномерно по t последовательностей $a_n(t), b_n(t)$. Однако вопрос существования решения в классе ограниченных равномерно по t на всей оси последовательностей $a(t), b(t)$ не изучен.

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. Задача (1)-(2) имеет единственное решение в классе ограниченных равномерно по $t \in (-\infty,+\infty)$ последовательностей $a(t), b(t)$.

Предпошлем две леммы к доказательству теоремы. В начале предположим, что задача (1)-(2) имеет ограниченное при каждом фиксированном t решение $a(t), b(t)$. Введем в рассмотрение семейство операторов $L(t)$, порожденных в $\ell_2[1,\infty)$ разностным выражением

$$(\ell y)_n = a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}\ ,\quad n = 1,2,...$$

и граничным условием $y_0 = 0$. Легко видеть, что оператор $L(t)$ при каждом t является ограниченным и самосопряженным.

Лемма1. Имеют место оценки

$$\|a(t)\|_{\ell_\infty} \le \|L(t)\|_{\ell_2},\ \|b(t)\|_{\ell_\infty} \le \|L(t)\|_{\ell_2}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как

$$\|L(t)\|_{\ell_2} = \sup_{\|y\|_{\ell_2}=1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

то при любом $m,\ m = 1,2,...$ справедливы неравенства

$$|a_m(t)| \le \|L(t)\|_{\ell_2}\ ,\quad |b_m(t)| \le \|L(t)\|_{\ell_2}\ ,$$

из которых и вытекает (3).

Лемма 2. Норма оператора $L(t)$ не зависит от t:

$$\|L(t)\|_{\ell_2} = \|L(0)\|_{\ell_2}. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство операторов $A(t)$, действующих в $\ell_2[1,\infty)$ по формулам

$$(A(t)y)_1 = -\frac{1}{2}a_1(t)y_2\ ,(A(t)y)_n = \frac{1}{2}a_{n-1}(t)y_{n-1} - \frac{1}{2}a_n(t)y_{n+1}\ ,\ n \ge 2\ .$$

Как следует из [1], система уравнений (1) равносильна операторному уравнению

$$\dot{L} = AL - LA\ .$$

Так как оператор $A(t)$ является кососимметрическим, то из последнего уравнения следует, что (см. [3]) семейство операторов $L(t)$ унитарно эквивалентно, т.е. существует семейство унитарных операторов $U(t)$ такое, что

$$U(0) = I\ ,\ L(t) = U^*(t)L(0)U(t)\ ,$$

где I - единственный оператор, действующий в $\ell_2[1,\infty)$. В силу последнего равенства имеем

$$\|L(t)y\|_{\ell_2}^2 = \left\langle U^*(t)L(0)U(t)y, U^*(t)L(0)U(t)y\right\rangle =$$

$$= \left\langle L(0)U(t)y, L(0)U(t)y\right\rangle = \|L(0)U(t)y\|_{\ell_2}^2 \le$$

$$\le \|L(0)\|_{\ell_2}^2\,\|U(t)y\|_{\ell_2}^2 = \|L(0)\|_{\ell_2}^2\,\|y\|_{\ell_2}^2\ .$$

Следовательно,

$$\|L(t)\|_{\ell_2} \le \|L(0)\|_{\ell_2}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\|L(0)\|_{\ell_2} \le \|L(t)\|_{\ell_2},$$

которое вместе с предпоследним неравенством приводит нас к справедливости (4).

Мы теперь подготовлены к тому, чтобы доказать теорему. В самом деле, как следует из [4] (см. теорему 4.1.5), в достаточно малой окрестности каждой точки t_0, $t_0 \in (-\infty, \infty)$ система уравнений (1) имеет ограниченное решение $a(t), b(t)$: $\|a(t)\|_{\ell_\infty} + \|b(t)\|_{\ell_\infty} < \infty$. Тогда из доказанных выше лемм вытекает, что для любого $t \in (-\infty, +\infty)$ верно неравенство

$$\|a(t)\|_{\ell_\infty} + \|b(t)\|_{\ell_\infty} \le 2\|L(0)\|_{\ell_2}$$

и тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи //Доклады АН СССР, 1985, т.281, №1, с.16-19.
2. Березанский Ю.М. Одно замечание относительно нагруженной цепочки Тоды. // Укр. Мат. Журн., 1985, т.37, №3, с.352-355.
3. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувиля. М.: Наука, 1984.
4. Abraham R., Marsden J.E. and Ratju T., Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd edition, Springer, New York, 1983.

SONSUZ QEYRİ-XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN KOŞİ MƏSƏLƏSİNİN QLOBAL HƏLL OLUNMASI

Aq.X.XANMƏMMƏDOV, X.E.ABBASOVA, Y.İ.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

İşdə yarımsonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemindən ibarət olan Toda zənciri üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələnin t-yə nəzərən bütün oxda müntəzəm məhdud olan $a(t) = (a_n(t))_{n=1}^{\infty}$, $b(t) = (b_n(t))_{n=1}^{\infty}$ funksional ardıcıllıqlar sinfində qlobal həll olunması isbat olunmuşdur.

GLOBAL SOLVABILITY OF SEMI INFINITE SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ag.Kh.KHANMAMEDOV, Kh.E.ABBASOVA , Y.I.HUSEYNOVA

SUMMARY

In this paper initial value problem for a semi infinite system of nonlinear differential equations is considered. This problem is initial boundary value problem for Toda lattice. Existence of a solution in the class of sequences $a(t) = (a_n(t))_{n=1}^{\infty}$, $b(t) = (b_n(t))_{n=1}^{\infty}$ uniformly bounded on t, $t \in (-\infty, +\infty)$ is proved.